

Όνοματεπώνυμο: Ζτούπη Ευαγγελία

Τάξη: Β1

9^ο Γυμνάσιο Τρικάλων

Μάθημα: Γεωμετρία

Καθηγήτρια: Παπαϊωάννου Ευαγγελία

Θέμα: « Ο ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ »

The image shows a blackboard covered in handwritten mathematical notes and diagrams. The word "MATH" is written in large, bold, yellow letters in the center. The board is filled with various mathematical concepts:

- Algebra:** $a^2 = 2ab + b^2 = (a+ab)^2$, $\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$, $x^2 - a^2 = (x+a)(x-a)$, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$, $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\log_n m = \frac{\log m}{\log n}$, $C_{n,r} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$, $x^2 + 2ax + a^2 = (x+a)^2$, $\cos(-x) = \cos(x)$, $\sec(z) = \frac{1}{\cos(z)}$, $\operatorname{csch}(x) = \frac{1}{\sinh(x)}$, $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$, $S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$, $S_n = \frac{a_1 - a_n}{1-r}$.
- Geometry:** Right-angled triangles with sides a, b, c and angles α, β, γ . A diagram of a square with side a and a smaller square with side b inside it, illustrating the Pythagorean theorem. A diagram of a circle with a right-angled triangle inscribed in it.
- Calculus:** $\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$, $\frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x}$, $\frac{d}{dx} e^x = e^x$, $\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x)$, $\frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x)$, $\frac{d}{dx} \tan(x) = \sec^2(x)$, $\frac{d}{dx} \cot(x) = -\operatorname{csc}^2(x)$, $\frac{d}{dx} \operatorname{arcsin}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\frac{d}{dx} \operatorname{arccos}(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\frac{d}{dx} \operatorname{arctan}(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $\frac{d}{dx} \operatorname{arccot}(x) = \frac{-1}{1+x^2}$, $\frac{d}{dx} \operatorname{arcsch}(x) = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$, $\frac{d}{dx} \operatorname{arcsech}(x) = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$.
- Complex Numbers:** $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, $|z|^2 = z\bar{z}$, $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$, $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$, $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$, $e^{-i\theta} = \cos(\theta) - i\sin(\theta)$, $\operatorname{coth}(z) = \frac{\cosh(z)}{\sinh(z)}$, $\operatorname{arccoth}(z) = \frac{1}{2} \ln \frac{z+1}{z-1}$, $\operatorname{arcsch}(z) = \ln \frac{1 + \sqrt{1-z^2}}{z}$, $\operatorname{arcsech}(z) = \ln \frac{1 \pm \sqrt{1-z^2}}{z}$.
- Trigonometry:** $\sin(-x) = -\sin(x)$, $\tan(-x) = -\tan(x)$, $\sec(-x) = \sec(x)$, $\operatorname{csch}(-x) = -\operatorname{csch}(x)$, $\operatorname{sech}(-x) = \operatorname{sech}(x)$, $\operatorname{tanh}(-x) = -\operatorname{tanh}(x)$, $\operatorname{coth}(-x) = \operatorname{coth}(x)$, $\operatorname{arcsch}(-z) = -\operatorname{arcsch}(z)$, $\operatorname{arcsech}(-z) = -\operatorname{arcsech}(z)$.
- Other:** $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$, $(a^m)^n = a^{mn}$, $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $\frac{a^m}{a^0} = a^m$, $a^0 = 1$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $\frac{P(x)}{Q(x)} = G(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$, $\operatorname{arcsin}(\sin(x)) = x$, $\operatorname{arccos}(\cos(x)) = x$, $\operatorname{arctan}(\tan(x)) = x$, $\operatorname{arcsch}(\sinh(x)) = x$, $\operatorname{arcsech}(\cosh(x)) = x$.

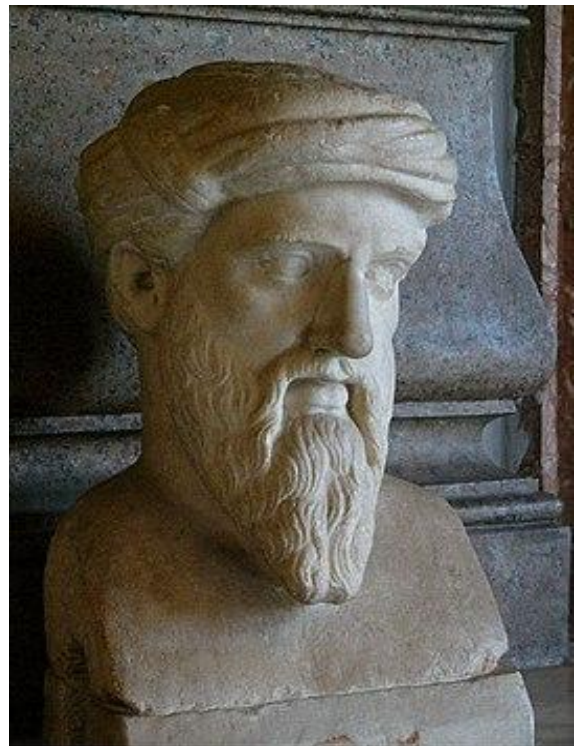
Ο ΠΥΘΑΓΩΡΑΣ

Ο Πυθαγόρας ο Σάμιος (580 π.Χ. - [Μεταπόντιο](#), 496 π.Χ.)

ήτανσημαντικός [Έλληνας φιλόσοφος](#), [μαθηματικός](#), [γεωμέτρης](#) και θεωρητικός της [μουσικής](#).

Ο βίος του

Είναι ο κατεξοχήν θεμελιωτής των ελληνικών μαθηματικών, δημιούργησε ένα άρτιο σύστημα για την επιστήμη των ουρανίων σωμάτων που κατοχύρωσε με όλες τις σχετικές αριθμητικές και γεωμετρικές αποδείξεις και ήταν ιδρυτής ενός μνητικού φιλοσοφικού κινήματος που λέγεται Πυθαγορισμός (*Pythagorism* ή *Pythagoreanism*). Επίσης, επηρέασε σημαντικά τη φιλοσοφία και τη θρησκευτική διδασκαλία στα τέλη του 6ου αιώνα π.Χ., συχνά αναφέρεται ως σπουδαίος μαθηματικός και [επιστήμονας](#) και είναι γνωστός για το [Πυθαγόρειο Θεώρημα](#) που έχει το όνομά του. Γεννήθηκε περίπου το 569 π.Χ. και ως επικρατέστερος τόπος γεννήσεως παραδίδεται η νήσος [Σάμος](#). Ακόμη είναι πιθανό να ταξίδεψε αρκετά όταν ήταν νέος. Γύρω στο 530 π.Χ. μετακόμισε σε μία



ελληνική αποικία στη νότια Ιταλία. Οι υποστηρικτές του Πυθαγόρα ακολούθησαν τις πρακτικές που ανέπτυξε και μελέτησαν τις φιλοσοφικές του θεωρίες. Τα μέρη συνάντησης των [Πυθαγόρειων](#) κάηκαν και ο Πυθαγόρας αναγκάστηκε να φύγει από την πόλη. Πέθανε στο [Μεταπόντιον](#) της Ιταλικής [Λευκανίας](#) σε ηλικία 84 ετών το 496 π.Χ.

Οι βασικές ιδέες της κοσμοθεωρίας του

Το αντικείμενο ενασχόλησης του Πυθαγόρα ήταν η καθοδήγηση μιας «εταιρείας». Αυτή η εταιρεία ήταν μία μυστική, θρησκευτική κίνηση, που είχε αναπτύξει και έντονη πολιτική δραστηριότητα.

Οι Πυθαγόρειοι του 5^{ου} αιώνα π.Χ συγκαταλέγονται στους πιο σημαντικούς επιστήμονες του καιρού τους και ο Πυθαγόρας φαίνεται να ενδιαφερόταν ιδιαίτερα για την επιστήμη. Στο Πυθαγόρειο σύστημα οι θρησκευτικοί και φιλοσοφικοί στόχοι είναι αλληλένδετοι. Από την εποχή του Doring έχει προβληθεί η σκέψη πως η ιδέα της κάθαρσης αποτελεί κλειδί για την κατανόηση της σχέσης θρησκείας και επιστήμης στον αρχικό Πυθαγορισμό. Η ιδέα της κάθαρσης δια της επιστήμης, απ' ό,τι είναι γνωστό, δεν αποδόθηκε στον Πυθαγόρα παρά μόνο από τον [Ιάμβλιχο](#). Βέβαια ο [Αριστόξενος](#), ο [Ηρόδοτος](#), ο [Εμπεδοκλής](#) και ο [Ίωνας](#) από τη [Χίο](#) αποκαλούν τον Πυθαγόρα: «πολυμαθή, ιστορικό και σοφιστή». Γύρω από το χαρακτηρισμό του Πυθαγόρα ως «σοφιστή» επικρατεί διχογνωμία. Μερικοί στη λέξη σοφιστής δίνουν την έννοια «επιστήμονας», σημασιολόγηση που

άλλοι απορρίπτουν. Η λέξη σοφιστής σύμφωνα με τους [Λίντελ](#) και Σκοτ αρχικά σήμαινε από τη μια αυτόν που κατείχε καλά την τέχνη του και από την άλλη τον φρόνιμο, τον συνετό.

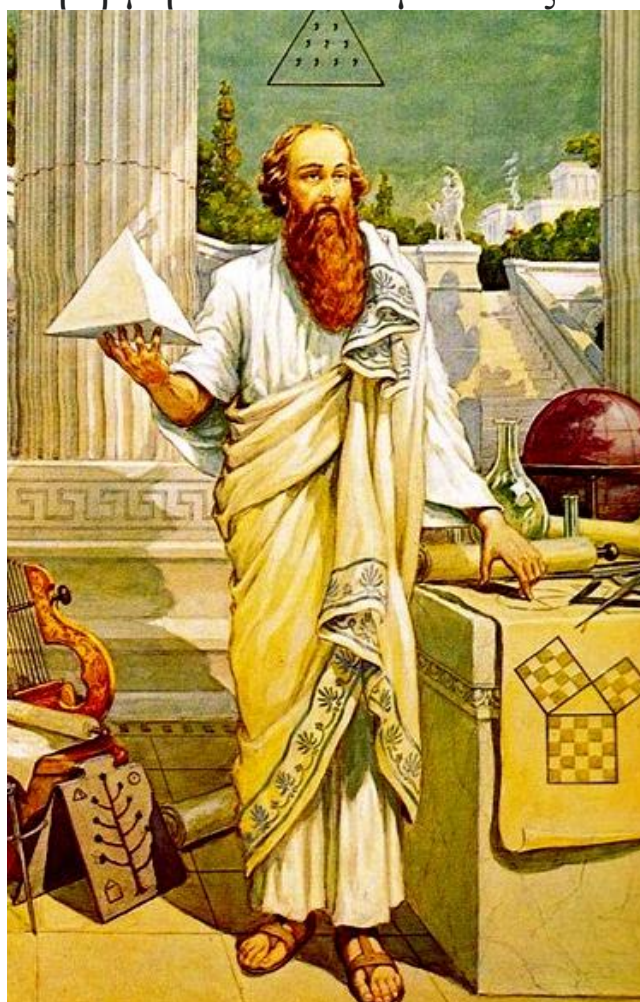
Υπάρχουν αρκετές μαρτυρίες που συνδέουν άμεσα τον Πυθαγόρα με την ιατρική ή τον παρουσιάζουν εφευρέτη διαφόρων θεραπευτικών μεθόδων (Ιάμβλιχος). Έχει επισημανθεί επίσης η συνάφεια των Πυθαγορείων με τα ευρήματα στην Ελέα και τις πρακτικές των ιατρομαντών.

Μια πολύ σημαντική ανακάλυψη που έκανε ο Πυθαγόρας είναι η αριθμητική ερμηνεία του σύμπαντος.

Μετρώντας τα κατάλληλα μήκη της χορδής ενός μονόχορδου, διαπίστωσε πως τα σύμφωνα μουσικά διαστήματα μπορεί να εκφραστούν σε απλές αριθμητικές αναλογίες των τεσσάρων πρώτων ακεραίων αριθμών.

Σ' αυτόν αποδίδονται οι αριθμητικοί λόγοι της οκτάβας ($1/2$, δια πασών), της τετάρτης καθαρής ($3/4$, συλλαβά), της πέμπτης καθαρής ($2/3$, δι' οξείαν) και του μείζονος τόνου ($8/9$, επόγδοος, που είναι η διαφορά μεταξύ τετάρτης καθαρής και

πέμπτης καθαρής). Αντίστοιχα τα διαστήματα που εκφράζουν οι λόγοι αυτοί από τους αρχαίους Έλληνες ονομάζονταν: δια πασών($1/2$), δια τεσσάρων($3/4$, λόγος



επίτριτος), δια πέντε($2/3$, λόγος ημιόλιος) και επόγδοον ($8/9$, λόγος επόγδοος). Το ενδιαφέρον του Πυθαγόρα για τη μουσική αρμονία οφείλεται στη θεωρία της «Αρμονίας των Σφαιρών» που διατύπωσε η σύζυγός του [Θεανώ](#).

Επίσης έχουν αποδοθεί σε αυτόν διάφορες γεωμετρικές ανακαλύψεις με γνωστότερο το ομώνυμό του θεώρημα.

Η νεότητα και οι πρώτες σπουδές στην Ελλάδα

Όταν ο Μνήσαρχος επέστρεψε στη Σάμο με πολλά κέρδη και μεγάλη περιουσία, έχτισε ιερό του Πύθιου Απόλλωνα και πρόσεξε ιδιαίτερα την ανατροφή του παιδιού του, αναθέτοντάς την παράλληλα τότε στον Κρεώφυλο, πότε στον Φερεκύδη από τη Σύρο καθώς επίσης και σε ιερείς.

Ο νεαρός Πυθαγόρας μεγάλωνε με μεγάλη σεμνότητα και σωφροσύνη και έγινε όμορφος στην εμφάνιση πολύ περισσότερο από άλλους νέους. Απολάμβανε δε κάθε είδους σεβασμό ακόμη και από τους πολύ μεγαλύτερούς του σε ηλικία πολίτες. Όταν ομιλούσε μετέστρεφε τους πάντες με το μέρος του και εφαινετο αξιοθαύμαστος ώστε από τους πολλούς να βεβαιώνεται με κάθε φυσικότητα πώς ήταν πράγματι υιός του θεού Απόλλωνος. Ενθαρρυνόμενος από τις σχετικές αυτές δοξασίες και την παιδεία που έλαβε από βρέφος και από τη φυσική του ομορφιά, ακόμη περισσότερο κατέβαλλε προσπάθεια να αποδεικνύει τον εαυτό του άξιο των προτερημάτων που τον διακοσμούσαν. Όλα όσα έλεγε ή έπραττε τα έκανε με μειλιχιότητα, δίχως να κυριεύεται

ούτε από οργή, ούτε από ζήλια, ούτε από εριστικότητα ούτε από άλλη διαταραχή ή επιπολαιότητα. Μεγάλη θρησκευτικότητα χαρακτήριζε τη συμπεριφορά του και ακολουθούσε ιδιαίτερα σημαντικές δίαιτες, με ισορροπία ψυχής και εγκράτεια σώματος.

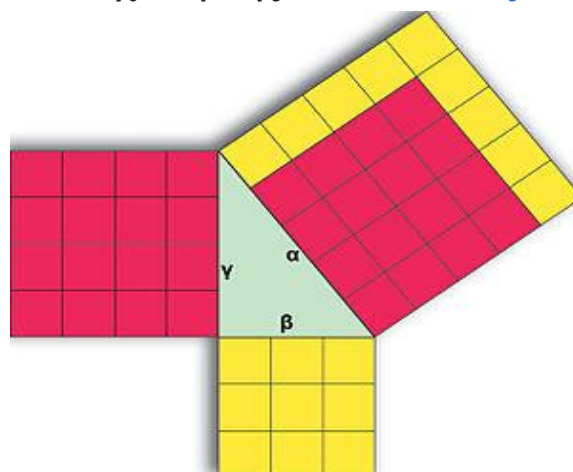
Όντας ακόμη έφηβος, η φήμη του έφθασε εις τη [Μίλητο](#) προς τον [Θαλήν](#) και εις την [Πριήνη](#) προς τον [Βίαντα](#), τους δύο εκ των επτά σοφών της αρχαιότητας και σε πολλά μέρη οι άνθρωποι εξεθείαζαν τον νεανία, αποκαλώντας τον, τον "εν Σάμω κομήτην". Μόλις εις τη Σάμο άρχισε να εμφανίζεται το τυραννικό καθεστώς του Πολυκράτους, εποχή όπου ο Πυθαγόρας ήταν περίπου δεκαοκτώ ετών, προβλέποντας ότι η τυραννία θα εμπόδιζε τα σχέδιά του και τη φιλομάθειά του, έφυγε μαζί με τον Ερμοδάμαντα τον Κρεοφύλειο για τη Μίλητο και τη [Σχολή της Ιωνίας](#) κοντά στον Φερεκύδη και στον φυσικό [Αναξίμανδρο](#) και στον φιλόσοφο Θαλή. Με την προσωπικότητα και την ευφράδεια της ομιλίας του, κέρδισε τον θαυμασμό και την εκτίμηση όλων και κατέστη κοινωνός των διδασκαλιών των. Μάλιστα ο Θαλής διακρίνοντας τη μεγάλη διαφορά του Πυθαγόρα εν συγκρίσει με τους άλλους νέους, του παραστάθηκε με ευχαρίστηση και του μετέδωσε όσες γνώσεις κατείχε, που ήταν δυνατόν να μεταδοθούν. Κοντά στον Θαλή ο Πυθαγόρας έλαβε την πρώτη του σοβαρή εκπαίδευση πάνω στα μαθηματικά, τη [γεωμετρία](#) και όσα έχουν σχέση με τους αριθμούς και τους υπολογισμούς. Ήταν ο Θαλής που προέτρεψε τον Πυθαγόρα να μεταβεί στην [Αίγυπτο](#) και να συναναστραφεί με τους ιερείς της Μέμφιδος και της Διοσπόλεως, από τους οποίους ο ίδιος ο Θαλής είχε λάβει πολλές γνώσεις, προλέγοντας πως εάν ο

Πυθαγόρας ερχόταν σε επαφή μαζί τους, θα γινόταν
θεικότερος και σοφότερος από όλους τους ανθρώπους.

➤ ΤΟ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

Το Πυθαγόρειο θεώρημα ή θεώρημα του
Πυθαγόρα στα **μαθηματικά**, είναι σχέση της **ευκλείδειας**
γεωμετρίας ανάμεσα στις
πλευρές ενός **ορθογώνιου**
τριγώνου. Συνεπώς
αποτελεί **θεώρημα** της
επίπεδης **γεωμετρίας**.

Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο
Θεώρημα, που εξ ονόματος
αποδίδεται στον αρχαίο
Έλληνα



φιλόσοφο **Πυθαγόρα**: «έν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ
ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτείνουσας πλευρᾶς
τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν
περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις.».

Δηλαδή: **«το τετράγωνο της υποτείνουσας (της
πλευράς που βρίσκεται απέναντι από την ορθή
γωνία) ενός ορθογώνιου τριγώνου ισούται με το
άθροισμα των τετραγώνων των δύο καθέτων πλευρών».**

Το θεώρημα μπορεί να γραφεί ως εξίσωση
συσχετίζοντας τα μήκη των πλευρών α,β και γ, που
ονομάζεται πυθαγόρεια εξίσωση:

$$\bullet \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$$

➤ ΤΟ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ ΤΟΥ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ

Αν σε ένα τρίγωνο, το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, τότε η γωνία που βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά είναι ορθή.

➤ ΟΙ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΕΣ ΤΡΙΑΔΕΣ

Μια **πυθαγόρεια τριάδα** αποτελείται από τρεις **θετικούς ακέραιους αριθμούς** α , β , και γ , τέτοιοι ώστε να ισχύει η σχέση $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$, ευρέως γνωστή ως **πυθαγόρειο θεώρημα**. Μια τέτοια τριάδα συνήθως γράφεται (α, β, γ) , και ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελούν οι αριθμοί $(3, 4, 5)$ εφόσον ισχύει $3^2 + 4^2 = 5^2$. Εάν (α, β, γ) είναι πυθαγόρεια τριάδα, τότε ομοίως θα είναι και η $(\kappa\alpha, \kappa\beta, \kappa\gamma)$ για οποιοδήποτε θετικό ακέραιο κ . Μια πρωτογενής πυθαγόρεια τριάδα είναι αυτή για την οποία οι α, β, γ είναι πρώτοι μεταξύ τους (δηλαδή ο **μέγιστος κοινός διαιρέτης** των α, β, γ είναι 1).

Τύπος για εύρεση πυθαγόρειων τριάδων

Οι πυθαγόρειες τριάδες είναι άπειρες και δίνονται από τον τύπο:

Αν k, m είναι τυχαίοι ακέραιοι τότε ισχύει:

$$(k^2 - m^2)^2 + (2km)^2 = (k^2 + m^2)^2$$

Άρα:

$$x = (k^2 - m^2), y = (2km), z = (k^2 + m^2)$$

ώστε

$$x^2 + y^2 = z^2$$